

TD n°4: Principe du maximum et ses conséquences

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Principe du maximum et théorème de Liouville

Exercice 1. Autour du principe du maximum.

1. Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0, 1)$ vérifiant $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ pour $|z| = 1$. Démontrer que f admet un zéro dans $\mathbb{D}(0, 1)$.
2. (a) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ des fonctions holomorphes. On prend des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Démontrer que si

$$z \mapsto \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$$

admet un maximum local, alors elle est constante.

(b) (Bonus : plus dur) Même question en remplaçant $f_j : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ par $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}^*$.

3. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$. En considérant $z \mapsto e^{f(z)}$, démontrer un principe du maximum pour $\Re(f)$, c'est-à-dire que si $\Re(f)$ admet un maximum local sur U , alors f est constante.

Exercice 2. Croissance comparée de fonctions entières.

Soient f, g des fonctions entières vérifiant $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $f = \lambda g$ pour un certain λ .

Exercice 3. L'inégalité de Carathéodory.

Soit f une fonction entière. On pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

1. Démontrer que M et A sont des fonctions continues croissantes de r , et qu'elles sont strictement croissantes si f n'est pas constante (on pourra se rappeler que $\Re f$ vérifie aussi le principe du maximum).
2. Supposons que $f(0) = 0$. On définit g par

$$g : z \mapsto \frac{f(2rz)}{2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)}.$$

Démontrer que g envoie le disque unité dans lui-même.

3. Démontrer à l'aide du lemme de Schwarz que $M(r) \leq 2A(2r)$.
4. Démontrer que si f est une fonction entière telle qu'il existe des constantes A, K, α telles que

$$\Re f(z) \leq A|z|^\alpha + K$$

pour z assez grand, alors f est un polynôme.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

 Exercice 4. Autour du théorème de Liouville.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vérifiant $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, \dots, N$ et $|f(z)| \leq C|z|^N$ pour $|z| \gg 0$. Démontrer que f est nulle.
2. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que f est un polynôme.
3. Soit f une fonction entière qui ne s'annule pas, et vérifiant qu'il existe des constantes $C, A > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|^d}$$

pour tout z assez grand. Démontrer que $f(z) = e^{P(z)}$ pour P polynôme de degré $\leq d$ (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent).

4. Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, l'équation $e^z = P(z)$ admet une infinité de solutions.

 Exercice 5. Théorème des trois cercles et des trois droites de Hadamard.

1. Soit r_1 et r_2 deux réels positifs et f une fonction holomorphe définie sur l'anneau $\{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$ et s'étendant continument à son adhérence. Pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on note:

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

On veut montrer que $\log M$ est une fonction convexe de $\log(r)$.

- (a) Démontrer que $\log M$ est une fonction convexe de $\log(r)$ si, et seulement si pour $r < R$, $\rho \in [r, R]$, on a

$$\log M(\rho) \leq \frac{\log(\rho) - \log(r)}{\log(R) - \log(r)} \log M(R) + \frac{\log(R) - \log(\rho)}{\log(R) - \log(r)} \log M(r).$$

- (b) Démontrer pour $\beta \in \mathbb{Q}$, on a

$$\rho^\beta M(\rho) \leq \max(r^\beta M(r), R^\beta M(R)).$$

En déduire que la même égalité est vraie pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

- (c) Conclure en appliquant le lemme précédent à un α tel que $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$.

2. Soient x_1 et x_2 deux réels et f une fonction holomorphe sur $B = \{z \in \mathbb{C}, x_1 < \Re(z) < x_2\}$, bornée et s'étend continument à $\overline{B}$. Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on note:

$$M(x) = \sup_{\Re(z)=x} |f(z)|.$$

On va prouver que $\log M$ est une fonction convexe de x .

- (a) Démontrer qu'il suffit de montrer que dans le cas $x_0 = 0, x_1 = 1$, on a

$$M(t) \leq M(0)^{1-t} M(1)^t.$$

- (b) Prouver le résultat dans ce cas en considérant la fonction holomorphe

$$z \mapsto \frac{f(z)}{M(0)^{1-z} M(1)^z (1 + \varepsilon z)}.$$

3. Prouver le théorème des trois cercles à partir du théorème des trois droites en considérant $z \mapsto f(e^z)$ sur une bande appropriée.

Lemme de Schwarz et disque unité



Exercice 6. Bornes supérieure de dérivées.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ vérifiant $0 < |f| < 1$, et $\mathcal{F}_c$ celles vérifiant de plus $|f(0)| = c$. Le but de cet exercice est d'étudier $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$ et $\sup_{f \in \mathcal{F}_c} |f'(0)|$.

- Justifier que l'on peut se restreindre aux $f \in \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_c$) telles que $f(0) > 0$.
A partir de maintenant, on fixe $f \in \mathcal{F}_c$ vérifiant $f(0) = c$.
- Démontrer qu'il existe $g : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re(z) < 0\}$ telle que $e^g = f$ et $g(0) = \log(c)$. Calculer $g'(0)$ en fonction de $f'(0)$.
On rappelle que $h : z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ est un biholomorphisme entre $\Re(z) < 0$ et $\mathbb{D}$.
- On pose $b = h \circ g(0)$. Calculer la dérivée de $h \circ g$ en 0, puis celle de $\psi = \phi_{-b} \circ h \circ g$ en 0.
- Conclure à l'aide du lemme de Schwarz.

Exercice 7. Variations du lemme de Schwarz.

Soient $M \geq 0$, $\mathbb{D}$ le disque unité, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

- Supposons que $|f(z)| \leq M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}.$$

- Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Montrer qu'alors :

$$|f(z)| \leq M|z|^k$$

Que peut-on dire s'il existe $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = M|a|^k$?

- On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $|f(z)| \leq M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|f(z)| \leq M|z|, \quad |f(z) - z| \leq (M+1)|z|^2.$$

- On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $|f'(z)| \leq M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|f'(z) - 1| \leq (M+1)|z|.$$

Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que

$$|f(z)| \leq M|z|, \quad |f(z) - z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2.$$

Exercice 8. Le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$.

Dans cet exercice, on note ϕ_a l'automorphisme de $\mathbb{D}$ donné par $\phi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$. On note $\text{Aut}(\mathbb{D})$ le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$.

- Démontrer que le produit $a * b = \frac{a+b}{1+\bar{a}b}$ définit une structure de groupe sur $\mathbb{D}$.
- Vérifier que l'application $a \mapsto \phi_a$ définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{D}, *)$ vers $\text{Aut}(\mathbb{D})$, d'image normale.
- En déduire que $\text{Aut}(\mathbb{D})$ est un produit semi-direct de $(\mathbb{D}, *)$ par $\mathbb{U}$ pour une action que l'on précisera.



Exercice 9. Lemme de Schwarz-Pick.

- Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$$

et

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

2. Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{H}$, on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{\overline{f(z)} - \overline{f(w)}} \right| \leq \left| \frac{z - w}{\bar{z} - w} \right|$$

et

$$\frac{|f'(z)|}{\Im f(z)} \leq \frac{1}{\Im(z)}.$$

Préciser le cas d'égalité.